Дәріс 3. Комплекс жазықтығының топологиясы. Комплекс жазықтықта дәрежелік қатардың жинақтылығы

1 Комплекс жазықтығының топологиясы

Әрбір комплекс санның модулі бар. Кереметтілігі, екі санның айырымының модулі келесі қасиеттерге ие болуы:

- Теріс еместігі, яғни $|z_1 - z_2| \geq 0$ кез-келген z_1, z_2 үшін;
- $|z_1 - z_2| = 0$ сонда және тек сонда ғана $z_1 = z_2$ болса;
- симметриялығы, яғни $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$ кез-келген z_1, z_2 үшін;
- үшбұрыш теңсіздігі, яғни $|z_1 - z_2| \leq |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|$ кез-келген z_1, z_2, z_3 үшін.

Соңғы қасиет, екі санның айырымының модулі осы сандардың барлық мүмкін болатын ара-қашықтығында минимумға жететінін білдіреді. Басқаша айтқанда, экстремалды

$$|z_1 - z_2| = \min\left\{l\left(z_1, z_2\right) : l - z_1, z_2 \text{ нүктелерін байланыстыратын үзіліссіз қисық}\right\}$$

орындалады.

Айырымның модулі $|z_1 - z_2| \geq 0$ көрсетілген экстремалды қасиетке ие болғандықтан, оны осы сандар арасындағы қашықтығы деп атайды, ал минимумға жететін кесіндіні -

геодезиялық сызық. Элементтер арасындағы қашықтықты енгізісімен, жинақтылық, шек, үзіліссіздік және т.б. түсініктерін енгізуге болады. Сонымен бірге, математикалық анализ курсында берілген анықтамалар сөзбе-сөз қайталанады. Бірақ мағынасы бойынша кейде нақты анализде болғаннан айырмашылығы болуы мүмкін.

1. $B\left(z_0, \varepsilon\right) = \{z : |z - z_0| < \varepsilon\}$ жазықтығындағы ашық шар, мұндағы z_0 - оның центрі, ал ε - радиусы. $B\left(z_0, \varepsilon\right)$ z_0 нүктесінің маңайы.
2. Жиынның ішкі нүктесі болады, егер нүкте өзінің қандай да бір маңайымен бірге жиынға тиісті болса.
3. Ашық жиын тек ішкі нүктелерден тұрады. Кез-келген ашық жиын, центрлері жиынның нүктелерінде болатын қандай да бір ашық шарлардың бірігуі болып табылады.

4. Тұйық жиын - бұл ашық жиынның толықтауышы. Кез-келген тұйық жиын, центрлері жиынның сыртында жататын ашық шарлардың толықтауыштарының қиылысуы болып табылады.

5. Топология - бұл барлық ашық жиындардың жиыны. Анықтама бойынша бос жиынды ашық жиын деп санаймыз.

6. Комплекс z санын комплекс сандардың $\{z_n\}$ тізбегінің шегі деп айтамыз, егер центрі z нүктесінде жататын әрбір ашық шар үшін бүкіл тізбек, мүмкін оның элементтерінің ақырлы санынан басқа, осы шарға тиісті болса. Онда тізбек жинақты дейді.

7. Комплекс ω саны, $F(z)$ функциясының z_0 нүктесіндегі шегі, ол функцияның анықталу облысының шектік нүктесі болады, егер центрі ω нүктесінде жататын әрбір ашық шар үшін, мүмкін болатын F-бейнелері, алдын-ала таңдап алынған центрі ω-да жататын ашық шарда жинақталатын z_0 нүктесінің тесілген маңайы бар болса.

8. Нүктедегі функцияның шегі осы нүктедегі функцияның мәніне сәйкес келгенде, функция сәйкес нүктеде үзіліссіз болады.

   Математикалық анализ курсынан белгілі анықтамаларды жалғастыруға болады. Математикалық анализ нәтижелерін комплекс анализге де көшіруге болатын бір диаграмманы көрсеткен дұрысырақ болады.

$$\begin{array}{cccc} F: & z \in D & \to & \omega \in C \\ \Downarrow & \Downarrow & & \Downarrow \\ \{u,v\}: & (x,y) \in D & \to & (u,v) \in R^2 \end{array}$$

Диаграммада өзара-бірмәнді сәйкестік тек комплекс жазықтығы мен R^2 жиынының арасында ғана емес, сонымен қатар, комплекс мағыналы функциялар мен екі айнымалы бойынша нақты мәнді жұптар арасында бар екенін көреміз. Сондықтан комплекс айнымалы функцияның жинақтылығын, үзіліссіздігін зерттеу жұмысын, екі айнымалыдан алынған нақты функция жұбын зерттейтін эквивалентті есеппен алмастыруға болады. Мысалы, z^2 функциясы комплекс жазықтығында үзіліссіз, себебі $\left\{x^2 - y^2, 2xy\right\}$ функциялар жұбы үзіліссіз.

Қорытындысында келесі үзіліссіздік критерин келтіреміз. Бұл критерий экономикада, нақты айтқанда қолдану теориясында қолданылады.

4-Теорема. *Функция анықталу облысында үзіліссіз, сонда және тек сонда ғана, егер мәндер жиынына қатысты әрбір тұйықтың түпбейнесі анықталу облысына қатысты тұйық болса.*

2 Дәрежелік қатарлардың комплекс жазықтығында жинақтылығы

Бұл бөлімде дәрежелік қатарлардың жинақтылығын нақтырақ зерттейік.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

дәрежелік қатарын қарастырамыз. Дәрежелік қатарлар нақты анализде керемет қасиеттер қатарына ие болғанын еске түсірейік:

- Центрі x_0 нүктесінде болатын симметриялы жинақтылық интервалы бар және бұл интервалдың сыртында жинақсыз;
- Формалды дифференциялдау жинақтылық интервалының радиусын кішіретпейді және үлкейтпейді;
- Жинақтылық интервалының ішінде дәрежелік қатар бірқалыпты жинақталады.

Көрсетілген қасиеттер комплекс жазықтығындағы дәрежелік қатарлар үшін де күшін сақтайды, егер жинақтылық интервалын жинақтылық дөңгелегімен алмастырсақ. Оның үстіне, математикалық анализ курсының дәрежелік қатарлар үшін дәлелдеулері де сақталады, егер абсолют шаманы комплекс санының модулі деп түсінсек.

9-жаттығу. Егер дәрежелік қатар $z_1 \neq z_0$ нүктесінде жинақталса, онда ол барлық z үшін бірқалыпты жинақталады, олар үшін келесі теңсіздік орындалады $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$.

Дәлелдеу үшін қатарды эквивалентті түрде

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z_1 - z_0)^n \frac{(z - z_0)^n}{(z_1 - z_0)^n}$$

жазып, және $\{c_n (z_1 - z_0)^n\}$ тізбегі шенелген, $\left|\frac{(z-z_0)^n}{(z_1-z_0)^n}\right| < 1$ болатынын еске түсірген жеткілікті.

Бұдан салдар ретінде жинақтылық дөңгелегінің бар болуы шығады. Мұндағы жинақтылық радиусын Коши-Адамар формуласымен табуға болатынын ескерте кетейік. Кейінірек, жинақтылық радиусы үшін формула орынды екені дәлелденеді.

2-тұжырым. *Жинақтылллық радиусы, иентрден қатар қосындысының ең жақын жатқан ерекше нүктесіне дейінгі ара-қашықтывына тең. Басқаша айтқанда, жинақтылық дөңггелегінің шекарасында қатардың ерекше қосындысының болуы қажет.*

Ескерту Қатар қосындысы ерекше нүктеде шенелмеген немесе голоморфтылықтың бұзылуы басқа бір себептен болуы мүмкін.

Ұқсас тұжырым нақты сандардан алынған дәрежелік қатарлар үшін орындалмауы мүмкін, егер жинақтылықты осьте қарастырсақ. Мысалы,

$$\sum_{n=6}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n(2n-1)}$$

қатарының бірге тең жинақтылық радиусы бар, әрі қатар $(-1;1)$ интервалының шекарасында жинақты. $(-1;1)$ интервалдың сыртында қатардың жинақталуына не кедергі болғаны түсініксіз. Сол уақытта,

$$\sum_{n=6}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{2n(2n-1)}$$

дәрежелік қатардың, ерекше нүкте ретінде жорамал бірлігі бар қосындысы бар. Бұтақтанудың арқасында көрсетілген нүктеде жинақтылық радиусы бірден үлкен бола алмайды.